



DOI:10.22144/ctu.jvn.2017.102

ĐÁNH GIÁ SAI SỐ TRƯỜNG TRỌNG LỰC KHI THAY THẾ HÀM DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC BẰNG CÁC GIÁ TRỊ RỜI RẠC

Vũ Xuân Cường và Đỗ Minh Tuấn

Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường thành phố Hồ Chí Minh

Thông tin chung:

Ngày nhận bài: 23/05/2017

Ngày nhận bài sửa: 21/07/2017

Ngày duyệt đăng: 06/10/2017

Title:

Evaluating the gravitational field error when replacing gravity anomalies with discrete values

Từ khóa:

Dị thường, mật độ phổ, Stokes, tần số, Vening-Meinesz

Keywords:

Anomaly, frequency, spectral density, Stokes, Vening-Meinesz

ABSTRACT

The replacement of the gravity anomaly in the Stokes and Vening-Meinesz equations by the set of gravity anomalies measured on the surface of the earth or in space leads to errors. These errors are evident when calculating the height anomaly and determining the angular deflection angle components. The purpose of this paper is to show the relationship between the quantity of errors to the discrete level of the original data. By using the gravitational field covariance density analysis method, the formula for estimating gravity anomaly is given, depending on the discreteness of the data and the gravity field's complexity.

TÓM TẮT

Việc thay thế hàm dị thường trọng lực trong các công thức Stokes và Vening-Meinesz bằng tập hợp các giá trị dị thường trọng lực được đo trên bề mặt vật lý trái đất hoặc trong không gian dẫn đến các sai số tất yếu khi tính dị thường độ cao và các thành phần góc lệch dây dọi. Mục đích của bài báo này là chỉ ra mối liên hệ giữa đại lượng các sai số đó với mức độ rời rạc của số liệu ban đầu. Bằng cách sử dụng phương pháp phân tích mật độ phổ hàm hiệp phương sai của trường trọng lực đã đưa ra được công thức đánh giá sai số dị thường trọng lực phụ thuộc vào bước rời rạc của số liệu và mức độ phức tạp của trường trọng lực.

Trích dẫn: Vũ Xuân Cường và Đỗ Minh Tuấn, 2017. Đánh giá sai số trường trọng lực khi thay thế hàm dị thường trọng lực bằng các giá trị rời rạc. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 52a: 1-5.

1 GIỚI THIỆU

Ngày nay, việc tính toán dị thường độ cao và góc lệch dây dọi chủ yếu dựa trên các công thức kinh điển Stokes và Venes-Vening-Meinesz, chúng có dạng sau (Moritz, 1980):

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma^0} \iint \Delta g(\psi) S(\psi) d\sigma \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma^0} \iint \Delta g(\psi) V(\psi) \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} d\sigma \quad (2)$$

Trong các công thức này, ζ - dị thường độ cao, ξ và η - các thành phần góc lệch dây dọi trong mặt phẳng kinh tuyến và mặt phẳng thẳng đứng thứ

nhất, γ^0 - giá trị trọng lực chuẩn trung bình, R - bán kính trung bình của trái đất Δg - dị thường trọng lực, $S(\psi)$ và $V(\psi)$ là hàm Stokes và Vening-Meinesz, ψ - khoảng cách cầu, σ - mặt lấy tích phân.

Tích phân kép trong công thức (1) và (2) được lấy từ $-\infty$ đến $+\infty$, hay nói cách khác, hàm số dị thường trọng lực $\Delta g(\psi)$ về bản chất là số liệu ban đầu, phải thỏa mãn hai điều kiện như sau: phải là hàm giải tích và phải được cho trước trong phạm vi toàn cầu. Trong thực tế, cả hai điều kiện này đều không được đáp ứng. Thứ nhất, không bao giờ có được hàm dị thường trọng lực liên tục (giải tích)

mà chỉ biết được các giá trị rời rạc của hàm này trên bề mặt vật lý trái đất hoặc trong không gian với một mật độ nhất định. Thứ hai, các số liệu dị thường trọng lực cũng không thể có đầy đủ trong phạm vi toàn cầu. Cả hai yếu tố này đều ảnh hưởng trực tiếp đến kết quả của hai tích phân trong công thức (1) và (2).

2 PHƯƠNG PHÁP

Bài báo chỉ xem xét yếu tố thứ nhất, tức là ảnh hưởng của sự rời rạc số liệu ban đầu. Như vậy, phải đặt giả thiết rằng các giá trị dị thường trọng lực trong phạm vi toàn cầu đã được xác định với một mật độ cần thiết nào đó. Trong thực tế, điều kiện trên không thể thực hiện được trong phạm vi toàn cầu hoặc thậm chí ở cả những khu vực nhỏ. Có những khu vực có các giá trị dị thường trọng lực dày đặc, ví dụ như ở các vùng đồng bằng, ở trong lãnh thổ một số nước phát triển,... Ngược lại, có những vùng chỉ có được các số liệu thưa thớt hoặc hoàn toàn không có, ví dụ như ở các vùng núi, các đại dương, các lãnh thổ có nền kinh tế lạc hậu,... Ngoài ra, cũng cần lưu ý thêm rằng độ chính xác các số liệu nói trên (nếu có) cũng sẽ rất khác nhau trong phạm vi toàn cầu. Giải pháp để khắc phục giả thiết về tính toàn cầu của hàm dị thường trọng lực mà không ảnh hưởng lớn đến độ chính xác các tích phân (1) và (2) là chia miền tích phân (1) và (2) thành 2 vùng, vùng gần và vùng xa. Vùng gần được tính bằng tích phân số, dị thường trọng lực được cho trước như các giá trị điểm tại các mắt lưới với kích thước nhất định, hoặc giá trị trung bình theo các ô với kích thước nhất định, vùng xa được tính theo các hàm cầu. Công thức (1) có thể được viết lại dưới dạng sau:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma^0} (\iint_{\omega}^R \Delta g S(\psi) d\omega + \iint_{\omega}^{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma) \quad (3)$$

Như vậy, thay vì phải có các giá trị dị thường trọng lực trong phạm vi toàn cầu chỉ cần biết các giá trị rời rạc của chúng trong một bán kính nào đó quanh điểm cần tính toán. Ảnh hưởng của vùng xa có thể sử dụng các mô hình trọng trường trái đất khác nhau. Tức là:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma^0} (\iint_{\omega}^{\omega} \Delta g S(\psi) d\omega + \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} a_n P_n(\cos \psi)) \quad (4)$$

trong đó, P_n - đa thức Legendre cấp bậc n. a_n - hệ số phụ thuộc vào mô hình trọng trường trái đất toàn cầu.

3 KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Ngày nay, có rất nhiều mô hình trọng trường trái đất đã được đề xuất, chúng khác nhau bởi số liệu đầu vào phục vụ tính toán, có loại mô hình chỉ

dựa trên số liệu mặt đất, có loại sử dụng hỗn hợp số liệu mặt đất và vệ tinh, có loại chỉ sử dụng số liệu vệ tinh,...

Một câu hỏi sẽ được đặt ra là: nếu đặt giả thiết như trên với miền xác định của dị thường trọng lực, vậy trong trường hợp nào thì có thể khôi phục lại được hàm dị thường trọng lực ở vùng gần bằng các giá trị rời rạc của hàm số đó? Để trả lời cho câu hỏi này, định lý Kotelnikova được vận dụng, cụ thể như sau:

Định lý Kotelnikova. Giả sử hàm $g^b(x, y)$ là hàm số có các tần số giới hạn với các tần số biên u_b và v_b . Khi đó, hàm số này có thể được khôi phục đầy đủ bằng các giá trị rời rạc $g^b(x, y) = g^b(i\Delta x, j\Delta y) = g^b(i, j)$ tại các mắt lưới với bước dài theo trục tung Δx và trục hoành Δy nếu $\Delta x \leq \frac{1}{2u_b}$ và $\Delta y \leq \frac{1}{2v_b}$, trong đó :

$$g_{\Delta}^b(x, y) = \Delta x \Delta y \sum_i \sum_j g^b(i, j) \frac{\sin[2\pi u_b(x-i\Delta x)]}{u_b(x-i\Delta x)} \cdot \frac{\sin[2\pi v_b(y-i\Delta y)]}{v_b(y-i\Delta y)}$$

(5) công thức (5) còn được gọi là công thức nội suy Whittaker.

Hàm giới hạn này $g^b(x, y)$ có mật độ quang phổ như sau:

$$S_g(\omega) = \begin{cases} S_g(\omega) & \text{khi } \omega \leq \omega_b \\ 0 & \text{khi } \omega > \omega_b \end{cases} \quad (6)$$

hoặc nếu chuyển sang tần số tuyến tính, ta có:

$$S_g(u, v) = 0 \text{ khi } u > u_b \text{ hoặc } v > v_b \quad (7)$$

Trong công thức này u_b, v_b, ω_b - tần số biên. Khi đó, khoảng cách rời rạc sẽ được tính theo công thức: $\Delta = \frac{\sqrt{2}}{2q_b}$.

Như vậy, đáp án cho câu hỏi đặt ra ở phần trên như sau: hàm dị thường trọng lực sử dụng trong công thức (1) và (2) có thể được khôi phục lại một cách đầy đủ bằng công thức (5) nếu là hàm số có giới hạn với mật độ quang phổ (6) và (7). Về lý thuyết, điều kiện trên đặt ra với hàm dị thường trọng lực là không thể thực hiện được, bởi vì miền xác định hàm dị thường trọng lực, từ công thức (1) và (2) là trong phạm vi toàn cầu, trong miền tần số, năng lượng của hàm này trải đều trên các tần số, vì vậy để thực hiện bài toán trên phải đặt nhiều giả thiết không tương ứng với thực tế cho hàm này. Ví dụ, phải là hàm đồng nhất trong không gian, là hàm có giới hạn, tức là ảnh hưởng của các tần số cao đến một cấp độ nào đó có thể coi là rất nhỏ và có thể được bỏ qua, nhưng thực chất, các giả thiết này đều không đúng với thực tế, cụ thể trường trọng lực không thể là hàm đồng nhất trong phạm vi toàn cầu, có chỗ hàm này tương đối đồng nhất, có chỗ lại biến đổi rất nhanh. Một trong những cách tiếp

cần có độ tin cậy cao là thay vì nghiên cứu hàm dị thường trọng lực, hàm dư của dị thường trọng lực sẽ được xem xét, nghĩa là thay thế công thức (4) bằng công thức sau:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma_0} (\iint_0^\omega \delta g S(\psi) d\omega + \iint_\omega^\sigma \Delta g^{Mod} S(\psi) d\sigma) \quad (8)$$

trong đó: $\delta g = \Delta g - \Delta g^{Mod}$;

$$\Delta g^{Mod} = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n (n - 1) \sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm} \cos m\lambda' + \Delta S_{nm} \sin m\lambda') \bar{P}_{nm}(\cos\varphi') \quad (9)$$

trong đó: Δg^{Mod} - dị thường trọng lực của mô hình nào đó đã được lựa chọn.

Công thức (9) tính dị thường trọng lực của mô hình trọng trường trái đất đã được chọn, như EGM-96, EGM-2008,... tại bất kỳ điểm nào trong không gian với tọa độ cầu (r, φ', λ') . Trong công thức (9): ΔC_{nm} và ΔS_{nm} - hiệu các hệ số các hàm cầu đã được chuẩn hóa của trọng trường thật và trọng trường chuẩn, và $\bar{P}_{nm}(\cos\varphi')$ - đa thức liên hợp Legendre đã được chuẩn hóa hoàn toàn cấp bậc n và thứ hạng m . Việc sử dụng công thức (8) trong thực tế tính toán dị thường độ cao được gọi là kỹ thuật remove-restore. Ngày nay, toàn bộ các phương pháp tính dị thường độ cao và các thành phần góc lệch dây dọi đều dựa vào kỹ thuật remove-restore (ví dụ trong các mô-đun của gói phần mềm GRAVSOFT). Trong trường hợp này, khi sử dụng kỹ thuật remove-restore số liệu ban đầu không phải là dị thường trọng lực mà là phần dư của dị thường trọng lực, ký hiệu là δg . Hiện nhiên, cần hiểu rằng, phần dư này chỉ phản ánh các yếu tố của trường trọng lực cục bộ, ảnh hưởng của phần sóng dài đã được loại trừ bởi mô hình Geoid toàn cầu. Nói cách khác, phần dư dị thường trọng lực là hàm giới hạn, cụ thể δg có mật độ quang phổ giới hạn, tức là hàm này thỏa mãn điều kiện (6) và (7).

Hãy xem xét trường hợp ngược lại, Δx và Δy đã được chọn trước. Đây là điều rất hay gặp trong thực tế, bởi vì vấn đề quyết định kích thước mắt lưới phụ thuộc rất nhiều yếu tố, trước tiên phải kể đến khả năng kinh tế, kích thước càng nhỏ đòi hỏi phải có số lượng các điểm đo chi tiết trọng lực không lồ, điều này không phải lúc nào cũng khả thi từ góc độ kinh tế và góc độ kỹ thuật (ví dụ như đo chi tiết dị thường trọng lực ở vùng núi và ngoài biển). Giả sử các bước dài Δx và Δy đã được chọn căn cứ vào khả năng kinh tế và kỹ thuật, khi đó tần số lớn nhất sẽ còn được chứa trong hàm $g^b(x, y)$ được xác định theo công thức sau đây:

$$u_b = \frac{1}{2\Delta x}, \quad v_b = \frac{1}{2\Delta y} \quad (10)$$

trong trường hợp này, người ta gọi tần số u_b và v_b là tần số biên Nyquist.

Mật độ quang phổ của hàm với các tần số có giới hạn cũng sẽ là hàm số giới hạn nếu chỉ phụ thuộc vào 1 biến $q = \sqrt{u^2 + v^2}$, và tồn tại một hằng số q_b sao cho $S_{g^b}(q) = 0$ khi thỏa mãn điều kiện $q > q_b$, để thuận tiện có thể đặt $\Delta x = \Delta y = \Delta$, tần số biên $u_b = v_b = \frac{1}{\sqrt{2}} q_b$ và $\Delta = \frac{1}{\sqrt{2}q}$. Trong quá trình thiết lập mối liên hệ giữa mức độ phức tạp của trường trọng lực ở khu vực nghiên cứu và bước ngắt quãng, đặt giả thiết thể nhiều (dị thường trọng lực/ phần dư dị thường trọng lực) tại vùng nghiên cứu tương đối ổn định và có thể được miêu tả bằng hàm ngẫu nhiên Markov bậc 2, có hàm hiệp phương sai như sau:

$$K_g(r) = D e^{-\beta r} (1 - \frac{\beta}{2} r) \quad (11)$$

Trong công thức này: D - phương sai trường trọng lực; r - khoảng cách giữa 2 điểm, còn tham số $\beta = \frac{0.44}{\rho} - \rho$ là bán kính hiệp phương sai, tức là $K_g(\rho) = \frac{1}{2} D$. Mật độ quang phổ của dị thường trọng lực được xác định như tích phân hai lớp của hàm hiệp phương sai này (Ventsel, 1969):

$$S(\omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} K(r) \cos(\omega r) dr \quad (12)$$

Tích phân (12) là tích phân kép, hàm $K_g(r)$ có tính chất đối xứng quay vòng, vì vậy, theo Bracewell (1986), có thể thay tích phân kép này bằng phép biến đổi Hankel như sau:

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} K(r) J_0(\omega r) r dr \quad (13)$$

Ở đây: $J_0(\omega r)$ - là hàm Bessel cải tiến loại một cấp độ 0 với đối số ωr .

Thay thế (11) vào (13), có thể nhận được hiệu hai tích phân:

$$S(\omega) = S^1(\omega) - S^2(\omega)$$

Trong đó:

$$S^1(\omega) = D \int_0^{\infty} r e^{-\beta r} J_0(\omega r) dr \quad (14)$$

Và:

$$S^2(\omega) = \frac{\beta D}{2} \int_0^{\infty} r^2 e^{-\beta r} J_0(\omega r) dr \quad (15)$$

Theo Prudnikov *et al.* (1983), ta có

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-px} J_\nu(cx) dx = (p^2 + c^2)^{-\alpha/2} \Gamma[\alpha + \nu] P_{\alpha-\nu}^{-\nu} \left(\frac{p}{\sqrt{p^2+c^2}} \right) \quad (16)$$

ở đây $\Gamma[\alpha + \nu]$ - hàm Gamma; $P_{\alpha-1}^{-\nu} \left(\frac{p}{\sqrt{p^2+c^2}} \right)$ - đa thức Jacobi.

Áp dụng công thức này vào (14) và (15), với trường hợp đang xét $x = r, \alpha = 2$ và $3, p = \beta, c = \omega$ và hiển nhiên $\nu = 0$, bỏ qua các phép biến đổi trung gian, ta nhận được biểu thức cho mật độ phổ (Neiman,1992):

$$S(\omega) = \frac{3\pi D\beta\omega^2}{(\omega^2+\beta^2)^{5/2}} \quad (17)$$

Mật độ quang phổ này trải đều trên các tần số, vì vậy hiệp phương sai sẽ được tính theo công thức (Ventsel, 1969):

$$D = \iint_{-\infty}^{\infty} S_g(u, v) du dv = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega_1 d\omega_2 = \frac{3D\beta}{4\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\omega^3 d\alpha d\omega}{(\omega^2+\beta^2)^{5/2}} = \frac{3D\beta}{2} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{(\omega^2+\beta^2)^{5/2}} \quad (18)$$

ở đây $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \omega_1=2\pi u, \omega_2 = 2\pi v$.

Tần số biên sẽ được chọn từ điều kiện, sao cho phương sai $d = D_{\delta_g b} - D_{\delta_g}$ có thể bỏ qua.

Theo Prudnikov *et al.* (1983), ta có:

$$\int \frac{x^3 dx}{(\beta^2 + x^2)^{5/2}} = -\frac{3x^2 + 2\beta^2}{3(\beta^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{1}{(\beta^2 + x^2)^{1/2}} \quad (19)$$

Áp dụng vào tích phân (18), ta được:

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{(\omega^2 + \beta^2)^{5/2}} = \frac{3\beta}{2} - \frac{3\omega_b^2 + 2\beta^2}{3(\omega_b^2 + \beta^2)^{3/2}} \quad (20)$$

Nếu lập sai số tương đối giữa phương sai bị bỏ qua và phương sai trường trọng lực, ta có:

$$\frac{d}{D_g} = \frac{D_g - D_g^b}{D_g} = \frac{3\beta}{2} \cdot \frac{3\omega_b^2 + 2\beta^2}{3(\omega_b^2 + \beta^2)^3} = \frac{\frac{3}{2} \left(\frac{\omega_b}{\beta}\right)^2 + 1}{\left[\left(\frac{\omega_b}{\beta}\right)^2 + 1\right]^{3/2}} \quad (21)$$

Trong công thức này:

$$\frac{\omega_b}{\beta} = \frac{\sqrt{2\pi\rho}}{0.44\Delta} \approx 7.15 \frac{\rho}{\Delta} \sqrt{2} \approx 10 \frac{\rho}{\Delta} \quad (22)$$

Rõ ràng, $\rho > \Delta$, vì vậy nếu loại bỏ yếu tố "+1" trong cả tử số và mẫu số của phương trình (21) sẽ không ảnh hưởng nhiều đến kết quả, thực hiện một vài phép biến đổi, phương trình (21) có thể ước tính bằng biểu thức sau:

$$\frac{d}{D_g} \approx \frac{3}{2} \cdot \frac{\beta}{\omega_b} \approx 0.15 \frac{\Delta}{\rho} \quad (23)$$

Giả sử d/D_g ta đặt bằng 1%, tức là sai số do rời rạc số liệu ban đầu so với phương sai trường trọng lực bằng 1%, ta có:

$$\Delta = \rho / 15 \quad (24)$$

Tức là giả sử trường trọng lực ban đầu được đặc trưng bởi phương sai $D=200 \text{ mgal}^2, r=30 \text{ km}$, nếu chấp nhận sai số do rời rạc bằng 2 mgal^2 thì bước rời rạc phải bằng 2 km , còn nếu muốn sai số nhỏ hơn, ví dụ, 1 mgal^2 , thì bước rời rạc phải bằng 1 km .

Như vậy, công thức (24) đã chỉ ra mối liên hệ giữa sai số do hiệu ứng rời rạc của số liệu ban đầu với khoảng cách giữa các mắt lưới và tính chất của trường trọng lực ở vùng nghiên cứu. Cần phải lưu ý rằng, công thức (24) được đưa ra trong nhiều giả thiết không tương ứng với thực tế của hàm dị thường trọng lực, cụ thể là:

- Tính toàn cầu của hàm dị thường trọng lực được thay thế bằng chuỗi (9). Cho dù chuỗi này có chi tiết đến mức độ nào đi nữa, đại lượng N_{max} vẫn là hữu hạn. Tất cả các hệ số lớn hơn N_{max} sẽ tạo thành sai số dư.

- Hàm dư dị thường trọng lực trong công thức (8) được đặt với giả thiết là hàm có giới hạn. Nhưng trong thực tế, vấn đề xác định tham số ω (kích thước vùng gần) trong công thức (8) vẫn còn là đề tài nghiên cứu của nhiều nhà khoa học trên thế giới.

- Sử dụng công thức (12) để tính mật độ quang phổ và (18) để tính phương sai. Hai công thức này chỉ đúng với hàm ngẫu nhiên đồng nhất, tức là chỉ phụ thuộc vào thời gian. Trong thực tế, hàm dư dị thường trọng lực không phải là hàm đồng nhất, như đã nêu ở trên.

Vì các giả thiết vừa được liệt kê ở trên nên điều kiện (24) trong thực tế sẽ chặt chẽ hơn rất nhiều, ví dụ thay vì điều kiện $\Delta = \rho/15$ trong thực tế có thể phải dùng điều kiện $\Delta = \rho/20$ hoặc nhỏ hơn nữa.

4 KẾT LUẬN

Như vậy, mục đích ban đầu của bài báo đã đạt được bằng công thức (24). Công thức này cho phép dự báo được nhiều dị thường trọng lực trong các tích phân Stokes và Vening-Meinesz nếu biết được mức độ rời rạc của số liệu ban đầu, và một điều rất quan trọng, mức độ nhiễu này phụ thuộc vào mức độ phức tạp của trường trọng lực. Như đã nêu ở trên, tất cả các tính toán đưa ra ở trên chỉ áp dụng cho một mô hình trọng trường trái đất, mà cụ thể là khi hàm hiệp phương sai của trọng trường trái đất

được miêu tả bằng hàm Markov bậc 2. Trong thực tế mức độ phức tạp của trường trọng lực còn có thể được miêu tả bằng hàm Markov bậc 3, hàm Jordan,... Để giải quyết bài toán triệt để hơn thì việc thực hiện tính toán cho các mô hình vừa được nêu trên là vấn đề rất cần được quan tâm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Bracewell, R., 1986. The Hartley Transform. Oxford University Press. USA, 168 pages.
- Moritz, H., 1980. Advanced physical geodesy. Abacus Press, W. Germany, 500 pages.

- Neiman, Ju.M., 1992. Tính bước dứt quãng. Tạp chí "Tin tức các trường đại học". Quyển "Trắc địa và bản đồ"/No3: 45-56 (Tiếng Nga).
- Prudnikov, A. P., Pruchkov, Ju. A., Marichev, O. I., 1983. Các tích phân và chuỗi. Tập 2: Các hàm đặc biệt. NXB "Nauka". Moscow, Russia, 752 trang. (Tiếng Nga).
- Ventsel, E. S., 1969. Xuất bản lần 4. Lý thuyết sai số. NXB "Nauka". Moscow, Russia, 576 trang. (Tiếng Nga).